

РОЗПОДІЛ МОЛЕКУЛ У ПОЛІ СИЛ

Досі ми вважали, що у рівноважному стані внаслідок хаотичності руху молекул встановлюється однакова їх концентрація у різних елементах об'єму.

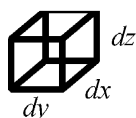
Справді, розглянемо молекули, які маючи швидкості у межах

$$v_x \div (v_x + dv_x);$$

$$v_y \div (v_y + dv_y);$$

$$v_z \div (v_z + dv_z),$$

крім того, потрапляють у просторі відстаней у окіл точки з координатами (x, y, z) , тобто



$$x \div (x + dx);$$

$$y \div (y + dy);$$

$$z \div (z + dz).$$

При рівномірному розподілі молекул у просторі їх кількість не залежить від абсолютного значення координат вибраної точки (x, y, z) , а лише від розміру околу $dx dy dz$. Скориставшись розподілом Максвелла молекул за швидкостями

$$f(v_{x,y,z}) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv_{x,y,z}^2}{2kT}},$$

запишемо цю кількість молекул (зверніть увагу, не в одиниці об'єму, а абсолютну кількість)

$$dN_{v_x, v_y, v_z, x, y, z} = BN \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT}} dv_x dv_y dv_z dx dy dz,$$

де B – це певна величина, пов'язана із розподілом молекул у просторі, N – повна кількість молекул у всьому об'ємі.

Нам треба знайти величину BN , отже накладемо таку умову, щоб при інтегруванні по швидкостях кількість молекул була цілою (щоб нам не довелося думати, що робити із половиною або третиною молекули).

Запишемо ось таку умову

$$\underbrace{\int \int \int}_V \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dN_{v_x, v_y, v_z, x, y, z} = N.$$

Це – умова нормування. Зверніть увагу, всі змінні незалежні, можна інтегрувати окремо по кожній змінній. Що дасть інтегрування імовірності попадання в окіл

певної швидкості по всім можливим значенням швидкості? Це буде одиниця. Залишається

$$dN_{x,y,z} = BN dx dy dz.$$

Тоді

$$BN \iiint dx dy dz = N.$$

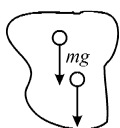
Що являє собою $\iiint dx dy dz$? Це повний об'єм V . Остаточного отримали

$$BV = 1; \quad B = \frac{1}{V}.$$

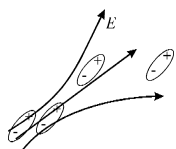
Так що при рівномірному розподілі ми отримаємо звичну формулу

$$dN_{v_x, v_y, v_z, x, y, z} = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT}} dv_x dv_y dv_z dx dy dz$$

для кількості молекул в одиниці об'єму (концентрації).



Це все є справедливим, якщо на газ не діють зовнішні сили. Припустимо, що газ знаходиться у полі земного тяжіння. На кожну молекулу буде діяти сила земного тяжіння. Навіть із найзагальніших міркувань важко припустити, що молекули розподіляться однорідно.

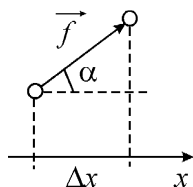


Або якщо молекули знаходяться у неоднорідному електричному полі. Вони можуть поляризуватись, тобто позитивний і негативний заряд у них просторово розділяться. Поле такої молекули буде взаємодіяти із зовнішнім полем, і молекули потягнуться у бік сильнішого поля. Тут теж важко стверджувати, що просторовий розподіл молекул залишиться однорідним.

Задачу про розподіл молекул у поля зовнішніх сил розв'язав Больцман, отже

Формула Больцмана

У силовому потенціальному полі на кожну молекулу газу, як матеріальну частинку масою m , діє сила, яка зумовлює її переміщення. Будемо вважати, що рух частинки в відбувається за законами класичної механіки. Нехай молекула під дією потенціальної сили $\vec{f}$ змінила своє положення вздовж осі x на Δx . Під час переміщення сила f не обов'язково повинна бути сталою, тому її робота визначається середнім значенням $\langle f \rangle$:



$$\Delta A = \langle f \rangle \Delta x \cos \alpha = \langle f_x \rangle \Delta x,$$

де α – кут між напрямком дії сили та віссю x .

Виконана робота чисельно дорівнює зміні потенціальної енергії молекули, але протилежна за знаком ($\Delta A = -\Delta E_{\Pi}$), тому

$$\langle f_x \rangle = -\frac{\Delta E_{\Pi}}{\Delta x}.$$

Для знаходження значення сили f_x у точці x перейдемо до нескінченно малого приросту

$$f_x = -\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta E_{\Pi}}{\Delta x} = -\frac{\partial E_{\Pi}}{\partial x}.$$

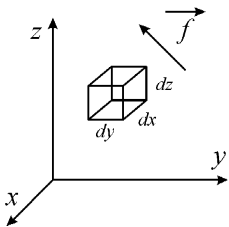
Потенціальна енергія молекули змінюється по всіх напрямках, тому межею виразу для f_x є частинна похідна. Аналогічні вирази можна написати і для двох інших координат

$$f_y = -\frac{\partial E_{\Pi}}{\partial y}; \quad f_z = -\frac{\partial E_{\Pi}}{\partial z}.$$

Тоді вектор сили можемо записати у вигляді

$$\vec{f} = f_x \vec{i} + f_y \vec{j} + f_z \vec{k} = -\left(\frac{\partial E_{\Pi}}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial E_{\Pi}}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial E_{\Pi}}{\partial z} \vec{k} \right) = -\text{grad } E_{\Pi} = -\nabla E_{\Pi}.$$

У газі, що знаходиться в потенціальному полі, виберемо декартову систему координат. Виділимо елемент об'єму dV , який має форму паралелепіпеда зі сторонами dx, dy, dz . Кількість молекул газу у цьому об'ємі дорівнює $ndxdydz$, (n – концентрація молекул). В межах виділеного паралелограма концентрацію молекул можна вважати сталою.



На кожную молекулу у об'ємі dV діє сила $\vec{f}$. Її проекція на вісь x

$$df_{1x} = -ndV \frac{\partial E_{\Pi}}{\partial x} = -ndxdydz \frac{\partial E_{\Pi}}{\partial x}.$$

Наявність зовнішньої сили призведе до того, що молекули у просторі будуть розміщені неоднорідно, отже створюватимуть у різних точках простору різний тиск. Для осі x ця різниця тисків на грані паралелепіпеда, перпендикулярні осі x

$$df_{2x} = \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) dx dS,$$

де $\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)$ – зміна тиску на одиницю довжини; $\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) dx$ – зміна тиску на бічних гранях; $dS = dydz$ – площа граней. Отже

$$df_{2x} = \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) dx dy dz.$$

Виділений елемент об'єму знаходиться у рівновазі. Обидві сили повинні врівноважувати одна одну. Тоді

$$df_{1x} = df_{2x}; \quad \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) dx dy dz = -n dx dy dz \frac{\partial E_{II}}{\partial x};$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) dx = -n \left(\frac{\partial E_{II}}{\partial x} \right) dx.$$

Аналогічні вирази запишемо і для двох інших координат

$$\left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) dy = -n \left(\frac{\partial E_{II}}{\partial y} \right) dy;$$

$$\left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) dz = -n \left(\frac{\partial E_{II}}{\partial z} \right) dz.$$

Додамо три останні рівняння :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) dy + \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) dz = -n \left[\left(\frac{\partial E_{II}}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial E_{II}}{\partial y} \right) dy + \left(\frac{\partial E_{II}}{\partial z} \right) dz \right].$$

Згадаємо, що

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) dy + \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) dz = dp; \quad \left(\frac{\partial E_{II}}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial E_{II}}{\partial y} \right) dy + \left(\frac{\partial E_{II}}{\partial z} \right) dz = dE_{II} -$$

відповідно повні диференціали зміни тиску та потенціальної енергії. Тоді перепишемо рівняння у вигляді

$$dp = -n dE_{II}.$$

Повний диференціал зміни тиску газу дорівнює добутку концентрації молекул на повний диференціал зміни потенціальної енергії молекули, взятому з оберненим знаком.

Ми давно вже не звертались до основного рівняння кінетичної теорії газів. Скористаємось ним у вигляді

$$p = nkT$$

і припустимо, що температура газу в потенціальному полі є сталою. Тоді

$$dp = kT dn.$$

Зіставивши це рівняння із

$$dp = -n dE_{II},$$

і позбавившись тиску, отримаємо

$$\frac{dn}{n} = -\frac{dE_{II}}{kT}.$$

Таке рівняння із розділеними змінними легко інтегрується

$$\ln n = -\frac{E_{II}}{kT} + C_1 = -\frac{E_{II}}{kT} + \ln C.$$

Звідси

$$n = Ce^{-\frac{E_{II}}{kT}}.$$

Для знаходження невідомої константи давайте введемо умову, що є точка з координатами (x_0, y_0, z_0) для якої ми точно знаємо потенціальну енергію молекули $E_{II}(x_0, y_0, z_0) = 0$, а концентрація $n(x_0, y_0, z_0) = n_0$. Тоді $C = n_0$, і

$$n = n(x, y, z) = n_0 e^{-\frac{E_{II}(x, y, z)}{kT}}.$$

Ми отримали **формулу Больцмана для розподілу частинок, які перебувають у тепловому русі у зовнішньому потенціальному полі.**

Кількість частинок тим більша, чим менша їхня потенціальна енергія (це більш енергетично вигідно), і експоненціально зменшується із збільшенням потенціальної енергії.

Зверніть увагу, розподіл Больцмана отриманий для довільного потенціального поля, ми не конкретизували його природу.

Для поля тяжіння Землі :

$$E_{II} = mgz; \quad n = n(z) = n_0 e^{-\frac{mgz}{kT}}.$$

Для поля відцентрових сил :

$$E_{II} = -\int_0^r f(r)dr = -\int_0^r m\omega^2 r dr = -\frac{m\omega^2 r^2}{2}; \quad n = n(r) = n_0 e^{-\frac{m\omega^2 r^2}{2kT}}.$$

Також цю формулу можна використовувати не тільки для полів, у яких потенціальна енергія залежить від просторових координат, а й для інших змінних. Тобто формула Больцмана є універсальною.

Йдемо далі, і отримаємо так звану барометричну формулу.

Барометрична формула

Сама назва вже підказує, що мова йде про тиск. А саме, йдеться про атмосферний тиск. Земна куля оточена шаром повітря, який становить її атмосферу. Нижній шар товщиною 11 км називається тропосферою. Далі йдуть інші ...сфери (рисунок). Ознаки атмосферного тиску виявлені на висоті до 1000 км.



Стан атмосфери Землі зумовлений одночасною дією гравітаційного поля Землі і тепловим рухом молекул повітря. Здавалося б, що під дією сили земного тяжіння молекули впадуть на землю, але тепловий рух запобігає цьому. З іншого боку, хаотичний рух міг би призвести до того, що атмосфера злетить із Землі, так сила тяжіння не дає.

Розподіл Больцмана для сили земного тяжіння

$$n = n(z) = n_0 e^{-\frac{mgz}{kT}}$$

свідчить, що найбільша концентрація молекул поблизу Землі, а із відстанню від неї концентрація зменшується. Відповідно до цього змінюється і тиск.

Явище зміни тиску з висотою вперше спостерігав Блез Паскаль за допомогою барометра Торрічеллі, піднявшись на дзвіницю Сен-Жак де-ля-Бушері у Руані.

Для отримання залежності зміни тиску із висотою будемо вважати, що атмосфера Землі є ізотермічною; вона перебуває у стані теплової $T = \text{const}$ та механічної (немає вітру) рівноваги.

Повернемось до розподілу Больцмана.

Знову скористаємось основним рівнянням кінетичної теорії газів, і виразимо концентрації молекул повітря через його тиск на поверхні Землі ($z = 0$)

$$p_0 = n_0 kT; \quad n_0 = \frac{p_0}{kT};$$

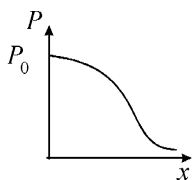
та на довільній висоті z

$$p = nkT; \quad n = \frac{p}{kT}.$$

Тоді

$$p = p_0 e^{-\frac{mgz}{kT}}.$$

Це **рівняння описує залежність тиску повітря від висоти і називається барометричною формулою.**



Графік залежності тиску від висоти має такий вигляд.

Що можна сказати про цю формулу? Вона була отримана з дуже великою кількістю припущень. Але певне застосування вона має і в такому вигляді. Наприклад, якщо температура $T = 273\text{K}$ не змінюється з висотою (хоч це і не так), а тиск біля поверхні Землі вважати рівним $P_0 = 10^5 \text{Па}$, отримаємо барометричну формулу у вигляді

$$p = p_0 e^{-\frac{z}{7,99}}.$$

Барометричну формулу у трохи іншому вигляді застосовують метеорологи :

$$z = 44308 \cdot \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{0,19028} \right], \text{ для } z \leq 11 \text{ км}$$

$$z = 11000 + 6340 \ln \frac{p_{11}}{p}, \quad \text{для } z > 11 \text{ км},$$

де p, p_0, p_{11} – тиски на довільній висоті, на поверхні Землі, та на висоті 11 км відповідно.

Так що, хоч деякі уявлення про зміну тиску з висотою вона дає.

Можна ще спробувати врахувати залежність прискорення вільного падіння від висоти :

$$g(z) = \gamma \frac{M}{(R + z)^2},$$

де γ – гравітаційна стала, M, R – маса та радіус Землі.

Виберемо на висоті z шар повітря завтовшки dz , у межах якого g не змінюється. Різниця тисків на висотах z і $(z + dz)$ становить

$$\begin{aligned} dp &= p(z + dz) - p(z) = \\ &= p_0 e^{-\frac{mg(z+dz)}{kT}} - p_0 e^{-\frac{mgz}{kT}} = p_0 e^{-\frac{mgz}{kT}} e^{-\frac{mgdz}{kT}} - p_0 e^{-\frac{mgz}{kT}} = p_0 e^{-\frac{mgz}{kT}} \left(e^{-\frac{mgdz}{kT}} - 1 \right). \end{aligned}$$

При малих x функція $e^{-x} \approx 1 - x$, тому

$$dp = p_0 e^{-\frac{mgz}{kT}} \left(1 - \frac{mgdz}{kT} - 1 \right) = -p \frac{mg}{kT} dz.$$

Розділимо змінні і перепишемо рівняння з урахуванням залежності прискорення вільного падіння від висоти :

$$\frac{dp}{p} = -\frac{m}{kT} \gamma \frac{M}{(R + z)^2} dz.$$

Проінтегрувавши, знайдемо

$$\ln p = \gamma \frac{mM}{kT} \cdot \frac{1}{R + z} + \ln C, \quad \text{або } p = C e^{\gamma \frac{mM}{kT} \cdot \frac{1}{R + z}}.$$

Оскільки на поверхні Землі $g(0)=g_0$, $\gamma \frac{M}{R^2}=g_0$, та $p=p_0$, то

$$p = C e^{\frac{mg_0}{kT} \cdot \frac{R^2}{R+z}}, \quad \text{а} \quad C = p_0 e^{-\frac{mg_0 R}{kT}}.$$

Остаточню, залежність атмосферного тиску від висоти при врахуванні залежності $g(z)$

$$p = p_0 e^{-\frac{mg_0 R}{kT} \left(1 - \frac{R}{R+z}\right)}.$$

Ця рівність дає дуже нефізичний результат на нескінченності

$$p(\infty) = p_0 e^{-\frac{mg_0 R}{kT}},$$

тобто на нескінченності атмосферний тиск не прямує до нуля. Це є наслідком наших нехтувань. Взагалі кажучи, щоб молекули вирватись з поверхні Землі їм досить мати швидкість 11,2 км/с, і такі молекули дійсно існують, але їх кількість знаходиться у самому кінці так званого “хвоста” максвеллівського розподілу, а значить їх така мізерна кількість, що атмосферного тиску за межами Землі вони не створять.

Отже, ми весь час критикуємо отриману формулу Больцмана, і не така вона, і не сяка, але дану нею залежність теж ретельно перевіряли експериментатори.

Досліди Перрена по визначенню числа Авогадро за допомогою розподілу Больцмана

(Сивухин, §78, с.280-284; Матвеев, §11, с.88-89, Кикоин, §8, с.52-54)

Що мене найбільше здивувало у підручниках, так те, що Жан Батист Перрен у всіх своїх дослідях насправді визначав сталу Больцмана, хоч, як зауважують автори, це теж саме, оскільки $kN_A = R$.

Частинки у полі тяжіння розподіляються за законом

$$n = n_0 e^{-\frac{mgz}{kT}}.$$

Якби вдалося виміряти масу частинки (ну, наприклад, молекули повітря), ми могли б визначити і сталу Больцмана, а через неї і число Авогадро. Але ця задача виявилась ще складнішою, ніж визначення констант.

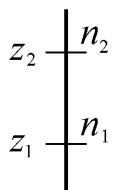
Пам'ятаєте, коли ми вводили кінетичну температуру як міру кінетичної енергії газу, ми розглядали поршень як дуже велику броунівську частинку. Перрен використав той факт, що при виводі формули Больцмана ми не накладали ніяких обмежень на розміри чи масу частинок. Отже, броунівські частинки можна розглядати як великі молекули, що не взаємодіють, і немає підстав сумніватись, що їх розподіл у полі сил тяжіння підпорядкований формулі Больцмана. Щоб у полі сили тяжіння вони не осіли на дно посудини, броунівські частинки треба помістити у рідину, густина якої трохи менша за густину матеріалу частинок.

Енергія броунівських частинок у такій рідині трохи зменшиться за рахунок сили Архімеда :

$$E_{II} = mgz - Mgz ,$$

де M – маса витісненої рідини. Тоді формула Больцмана набуває вигляду

$$n = n_0 e^{-\frac{(m-M)gz}{kT}} .$$



Вимірявши кількість частинок n_1 і n_2 на двох висотах z_1 і z_2 , маємо

$$n_1 = n_0 e^{-\frac{(m-M)gz_1}{kT}} ; \quad n_2 = n_0 e^{-\frac{(m-M)gz_2}{kT}} .$$

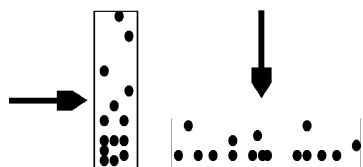
Розділивши одне рівняння на друге, а потім прологарифмувавши, отримаємо

$$\ln \frac{n_1}{n_2} = \frac{(m-M)(z_2 - z_1)g}{kT} ,$$

звідки стала Больцмана

$$k = \frac{(m-M)(z_2 - z_1)g}{T \ln \frac{n_1}{n_2}} .$$

Всі величини у цій формулі можуть бути досить точно виміряні. Єдиною великою технологічною проблемою була необхідність отримання значної кількості однакових броунівських частинок. Перрен використав фарбу гумігут, яку розтирав у воді або обробляв спиртом. Він отримав після кількох місяців сепарації центрифугою із 1 кг гумігуту кілька десятків грамів однакових частинок.



Дослід Перрен проводив у двох модифікаціях – горизонтальній і вертикальній. При горизонтальній модифікації мікроскоп, за допомогою якого визначалась кількість частинок у полі зору, був розташований вертикально і фокусувався на різні глибини, а при

вертикальний – був розташований горизонтально, фокусуючись на різних висотах.

Отримане таким методом значення сталої Больцмана було близьким до визначених іншими методами.

Об'єднана формула Максвелла-Больцмана розподілу молекул за швидкостями та у полі сил

Повна енергія молекули у потенціальному полі визначається її кінетичною і потенціальною енергією

$$E = E_K + E_{II}.$$

Ця енергія є однаковою у будь-якій точці потенціального поля згідно із законом збереження енергії. Потенціальна енергія молекули залежить від її положення (x, y, z) . Зміна потенціальної енергії спричиняє зміну і кінетичної енергії молекул, оскільки $E = \text{const}$. Але середня кінетична енергія $\langle E_K \rangle$ не змінюється, а отже, не змінюється і температура газу, оскільки вона є мірою кінетичної енергії молекул газу.

Давайте проаналізуємо поведінку газу у полі тяжіння Землі. Під час руху вгору потенціальна енергія молекул збільшується, а кінетична зменшується, бо повна енергія мусить залишатись сталою. Але, за розподілом Больцмана, на велику висоту піднімається мала кількість молекул, тому $\langle E_K \rangle$ усереднюється по меншій кількості молекул, і ця величина не змінюється. При рухові молекул униз зменшується їх потенціальна енергія, але збільшується кінетична. Але таку кінетичну енергію має більша кількість молекул, отже, усереднення не змінює $\langle E_K \rangle$.

Розподіл Больцмана пов'язаний із потенціальною енергією молекул, розподіл Максвелла – із кінетичною енергією. Із наведених міркувань випливає, що розподіл Больцмана не впливає на температуру газу, а отже, і на розподіл Максвелла. Це два абсолютно незалежних розподіли, оскільки незалежними є координати (Больцман) і швидкості (Максвелл) молекул.

Обидва ці розподіли можна об'єднати у єдиний розподіл Максвелла-Больцмана.

Нехай потенціальна енергія молекули у точці із координатами (x, y, z) становить $E_{II} = E_{II}(x, y, z)$. Кількість молекул у одиничному об'ємі простору, де

потенціальна енергія молекул дорівнює E_{II} , визначається розподілом Больцмана

$$n(x, y, z) = n_0 e^{-\frac{E_{II}}{kT}}.$$

Виберемо елемент об'єму навколо заданої точки (x, y, z) – $dV = dxdydz$. Врахувавши, що

$$n(x, y, z)dV = n(x, y, z)dxdydz = dN_{x,y,z},$$

отримаємо кількість атомів, що лежить у околі точки з координатами (x, y, z) із довільними швидкостями. Щодо околу точки з координатами (x, y, z) , нагадаю, що їх координати лежать у проміжках

$$x \div (x + dx),$$

$$y \div (y + dy),$$

$$z \div (z + dz).$$

$$dN_{x,y,z} = n_0 e^{-\frac{E_{II}}{kT}} dxdydz.$$

Виділимо ті молекули, проекції швидкостей набувають значень у проміжках

$$v_x \div (v_x + dv_x);$$

$$v_y \div (v_y + dv_y);$$

$$v_z \div (v_z + dv_z).$$

Вираз для таких молекул запишемо як

$$dN_{x,y,z,v_x,v_y,v_z} = dN_{x,y,z} f(v_x) f(v_y) f(v_z) dv_x dv_y dv_z.$$

Скориставшись розподілами Максвелла і Больцмана, отримаємо

$$dN_{x,y,z,v_x,v_y,v_z} = n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\left(\frac{mv^2}{2} - E_{II} \right) / kT} dxdydz dv_x dv_y dv_z,$$

або оскільки $E = \frac{mv^2}{2} - E_{II}$, рівняння набуває вигляду

$$dN_{x,y,z,v_x,v_y,v_z} = n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{E}{kT}} dxdydz dv_x dv_y dv_z.$$

Цей вираз вже є **розподілом Максвелла-Больцмана молекул за швидкостями та у полі сил**.

Легко показати, що із цього розподілу можна отримати окремо розподіли Максвелла та Больцмана. Знайдемо кількість молекул у одиниці об'єму з усіма можливими швидкостями за наявності потенціального поля. Для цього проінтегруємо формулу Максвелла-Больцмана по всіх можливих швидкостях

$$dN_{x,y,z} = n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{E_K + E_{II}}{kT}} dx dy dz dv_x dv_y dv_z =$$

$$= n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{E_{II}}{kT}} dx dy dz \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv_x^2}{kT}} dv_x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv_y^2}{kT}} dv_y \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv_z^2}{kT}} dv_z$$

Скористаємось тим, що інтеграли є інтегралами Пуассона, отже

$$dN_{x,y,z} = n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{E_{II}}{kT}} dx dy dz \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{-3/2};$$

$$dn_{x,y,z} = \frac{dN_{x,y,z}}{dx dy dz} = n_0 e^{-\frac{E_{II}}{kT}}.$$

Отримали розподіл Больцмана. Так само можна від загального виразу перейти і до розподілу Максвелла. Справді, проінтегруємо по всіх просторових координатах розподіл за відсутності потенціального поля

$$dN_{v_x, v_y, v_z} = n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dx dy dz dv_x dv_y dv_z \underbrace{\int dx \int dy \int dz}_V;$$

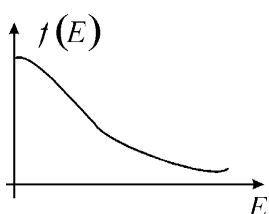
$$dn_{v_x, v_y, v_z} = \frac{dN_{v_x, v_y, v_z}}{V} = n_0 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv_x dv_y dv_z.$$

Так само із узагальненого розподілу Максвелла-Больцмана отримали розподіл Максвелла для проекцій швидкостей.

По аналогії з попередніми функціями розподілу, вводять

$$f(E) = A e^{-\frac{E}{kT}}$$

функцію розподілу Максвелла-Больцмана. Веде вона себе монотонно – із збільшенням енергії вона зменшується.



І останні зауваження щодо розподілів Максвелла, Больцмана та Максвелла-Больцмана. Вони отримані у

припущенні, що рух молекул газу описується законами класичної механіки, де частинки можна відрізнити одну від одної. Тобто, якщо дві молекули помінялись місцями, то це змінює мікростан системи.

Але як насправді відрізнити одну частинку від іншої? Чим один атом водню відрізняється від іншого, або електрон від електрона? На відміну від класичної статистики, яку ми досі розглядали, квантова статистика розглядає розподіл тотожних частинок за квантовими станами. До речі, яке електрон відношення має до газу? Ми все розглядали для молекул, але якщо є сукупність частинок, до якої можна застосувати вимоги ідеального газу, яка рухається, співударяється, до неї можна частково застосувати отримані нами результати. Існують поняття електронний газ, фононний газ.

Розподіл Максвелла-Больцмана і квантові статистики

Поняття квантового стану є найголовнішим у квантовій теорії, ви будете з ним зустрічатись регулярно у наступних курсах фізики, а для нас зараз важливо, що квантовий стан характеризується певним набором чисел, які називають квантовими числами. Деякі квантові числа можуть бути пов'язані із енергією, інші – з іншими параметрами.

Сподіваюсь, ви знаєте, що елементарним частинкам властивий власний момент імпульсу, який має квантову природу і не пов'язаний з переміщенням частинки як цілого. Квадрат цього моменту дорівнює

$$L_s^2 = \hbar s(s+1),$$

де $\hbar = h/2\pi$, а s – квантове число, яке називається спіном, і може набувати лише цілих та напівцілих значень $\left(1, 2, 3, \dots, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots\right)$. В залежності від значення спіну у кожному квантовому стані може бути або багато частинок (з цілим спіном), або лише одна (з напівцілим спіном).

Основних квантових статистик дві – Бозе-Ейнштейна (Айнштайна) та Фермі-Дірака. Підпорядкованість частинки якійсь із цих статистик визначається саме спіном. Частинки із цілим спіном описуються статистикою Бозе-Ейнштейна, а з напівцілим – Фермі-Дірака.

Статистика Бозе-Ейнштейна. Їй підпорядковані фотони (кванти світла), фонони (кванти коливань кристалічної ґратки), π – мезони. Всі вони мають назву бозони і відрізняються один від одного частотою ν і, відповідно, і енергією $h\nu$. Я не буду вам зараз виводити формулу розподілу, вона має вигляд

$$f(E) = \frac{1}{e^{\frac{E}{kT}} - 1}$$

і називається функцією розподілу Бозе-Ейнштейна.

Статистика Фермі-Дірака. Їй підпорядковані електрони, протони, нейтрино. Всі вони мають назву **ферміони**. Функція розподілу Фермі-Дірака має вигляд

$$f(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-E_0}{kT}} + 1},$$

де E_0 – так звана енергія Фермі, зміст якої такий – немає жодної частинки з енергією більшою за енергію Фермі.

Ви бачите, що ці розподіли суттєво відрізняються від розподілу Максвелла-Больцмана. Але за умови $E \gg kT$ експонента у формулах розподілу почне переважати другий доданок у знаменнику і набуде вигляду саме розподілу Максвелла-Больцмана

$$f(E) = Ae^{-\frac{E}{kT}}.$$

Але найцікавіше те, що це співпадіння формул (тобто крайніх випадків розподілів Бозе-Ейнштейна та Фермі-Дірака з розподілом Максвелла-Больцмана) не має ані найменшого фізичного змісту. Просто так співпало. Насправді немає частинок, які б підпорядковувались статистиці Максвелла-Больцмана. Але цей розподіл з математичної точки зору задовільно описує поведінку частинок у переважній більшості випадків. Таке співпадіння свідчить про універсальний характер всіх отриманих нами розподілів.